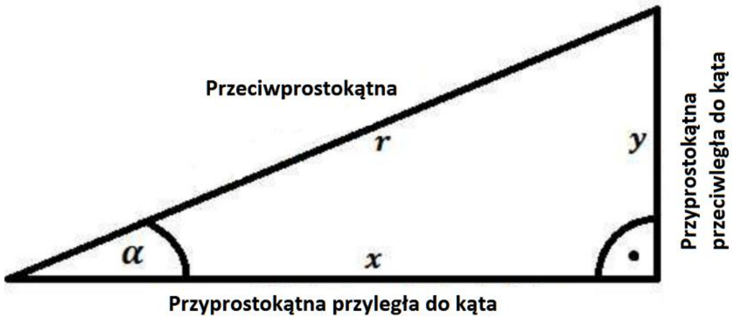
1. Trygonometria

1.1Wprowadzenie

Jednym z podstawowych działów matematyki który wykorzystywany jest w rozwiązywaniu problemów technicznych jest trygonometria. W szkole średniej wprowadzone zostały podstawowe prawa oraz własności trygonometryczny które w niniejszym rozdziale zostaną przypomniane oraz wykorzystane do rozwiązywania zadań w programie MATLAB.

1.1.1 Funkcje Trygonometryczne kąta ostrego



Funkcją sinus kąta α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, i opisujemy jako:

- $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ w Matlabie będzie to funkcja sin(x) gdzie x jest wartością kąta w radianach bądź sind(x) gdzie kąt wyrażony będzie w stopniach.

Funkcją cosinus kąta α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, i opisujemy jako :

- $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ w Matlabie będzie to funkcja cos(x) gdzie x jest wartością kąta w radianach bądź cosd(x) gdzie kąt wyrażony będzie w stopniach.

Funkcją tangens kąta α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej przy kącie α w trójkącie prostokątnym, i opisujemy jako:

- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ w Matlabie będzie to funkcja tan(x) gdzie x jest miarą kąta w radianach bądź tand(x) gdzie kąt wyrażony będzie w stopniach.

1.1.2 Własności funkcji trygonometrycznych

Rozbudowując wiedzę podstawową dotyczącą funkcji trygonometrycznych należy odnieść się do zagadnień funkcji elementarnych.

- Funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall\, a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

z czego wynika:

$$\forall\, a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Inaczej mówiąc funkcja jest różnowartościowa, kiedy nie przyjmuje dwa razy tej samej wartości, czyli jest bijekcją na swój zbiór wartości.

- Zacieśnieniem funkcji f do podzbioru A nazywamy funkcje:

$$\forall\, x\ \in A :\ f_{|A}(x) = f(x)$$

Dzięki zastosowaniu powyższej definicji ograniczającej dziedzinę, funkcja często nabywa własności których uprzednio nie posiada takie jak np. monotoniczność oraz różnowartościowość.

- Funkcja f: $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ jest rosnąca w przedziale (a,b) gdy:

$$\forall\, x, y\ \in (a, b) :\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Funkcja f: $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ jest malejąca w przedziale (a,b) gdy:

$$\forall\, x, y\ \in (a, b) :\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

W oparciu o powyższe definicje można określić właściwości funkcji trygonometrycznych:

- Funkcja f(x)=sin(x) zacieśniona do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest różnowartościowa oraz ściśle rosnąca.
- Funkcja f(x)=cos(x) zacieśniona do przedziału $[0, \pi]$ jest różnowartościowa oraz ściśle malejąca.
- Funkcja f(x)=tg(x) zacieśniona do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest różnowartościowa oraz ściśle rosnąca.
- Funkcja f(x)=ctg(x) zacieśniona do przedziału $[\ 0, \pi]$ jest różnowartościowa oraz ściśle malejąca.

1.1.3 Wybrane tożsamości trygonometryczne

Podstawowe zależności między funkcjami trygonometrycznymi nazywamy tożsamościami trygonometrycznymi.

- Jedynka trygonometryczna:

$$\forall x \in\ \mathbb{R} : cos^2x + sin^2x = 1$$

- Okresowość funkcji ($k \in\ \mathbb{R}$)

$$sinx = \sin(x + 2k\pi)\,;\ tgx = \mathrm{tg}(x + k\pi)$$

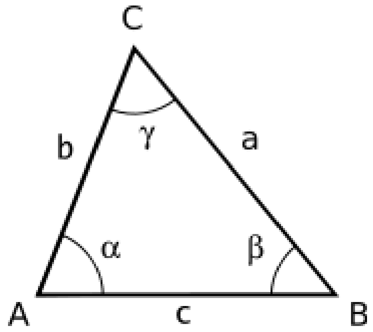
$$cosx = \cos(x + 2k\pi)\,;\ ctgx = ctg(x + k\pi)$$

- Zależność tangensa i cotangensa

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} \qquad ctgx = \frac{cosx}{sinx}$$

1.1.4 Twierdzenia trygonometryczne

Poza podstawowymi własnościami trygonometrycznymi w obliczeniach inżynierskich używa się również równań trygonometrycznych opisujących zależności między bokami i kątami w trójkątach.



- Twierdzenie sinusów

Dla dowolnego trójkąta iloraz długości dowolnego z jego boków i sinusa kąta naprzeciw tego boku, jest stały oraz równy długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie to posiada również swój odpowiednik dla sfery:

Jeżeli a,b,c odpowiadają długościom odcinków sferycznych, zaś α, β, γ są kolejnymi kątami umieszczonymi dokładnie naprzeciw boków a,b,c to:

$$\frac{sin\alpha}{sina} = \frac{sin\beta}{sinb} = \frac{sin\gamma}{sinc}$$

- Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie znajdującym się na płaszczyźnie, kwadrat długości jego dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonych o podwójny iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta znajdującego się pomiędzy nimi.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

Jeżeli trójkąt jest prostokątny i kąt γ jest kątem prostym wtedy twierdzenie można uprościć do twierdzenia Pitagorasa.

- Twierdzenie tangensów

Jeżeli a i b są długościami boków trójkąta a α i β są miarami kątów umiejscowionych odpowiednio naprzeciw nich wówczas:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

1.1.5 Funkcje cyklometryczne

Kolejnym istotnym elementem trygonometrii są funkcje odwrotne inaczej cyklometryczne. Funkcjami cyklometrycznymi nazywamy funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych oraz ograniczonych do pewnych przedziałów.

- Arcus sinus

Funkcją określoną na przedziale [-1,1] o wartościach z przedziału $[\ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz odwrotną do zacieśnienia funkcji sinus w granicach przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nazywamy acrus sinus, oznaczamy go jako arcsin.

- Arcus cosinus

Funkcją określoną na przedziale [-1,1] o wartościach z przedziału $[0, \pi]$ odwrotną do zacieśnienia funkcji cosinus w granicach przedziału $[0, \pi]$ nazywamy arcus cosinus, oznaczamy go jako arccos.

- Arcus tangens

Funkcją określoną na przedziale [-∞,∞] o wartościach z przedziału $[\ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz odwrotną do zacieśnienia funkcji tangens w granicach przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nazywamy acrus sinus, oznaczamy go jako arctg.

- Arcus cotangens

Funkcją określoną na przedziale [-∞,∞] o wartościach z przedziału $[0, \pi]$ odwrotną do zacieśnienia funkcji cotangens w granicach przedziału $[0, \pi]$ nazywamy arcus cosinus, oznaczamy go jako arcctg.

Zgodnie z twierdzeniami funkcji odwrotnych:

arcsin(x) = y gdy sin y = x

arccos(x) = y gdy sin y = x

arctg(x) = y gdy tg y = x

arcctg(x) = y gdy ctg y = x

1.2 Przykłady zadań z rozwiązaniami w MATLAB

Aby poprawnie wykonać poniższe zadania należy wygenerować dla każdego z nich plik .m o odpowiednich nazwach: zad01.m i zad02.m.

save zad01.m ENTER

save zad02.m ENTER

Zad. 1

Obliczyć równanie trygonometryczne:

$$8 - cos^2\frac{x}{2} = \frac{tanx + 3sinx}{2tanx}$$

Dla x=3

Rozwiązanie MATLAB:

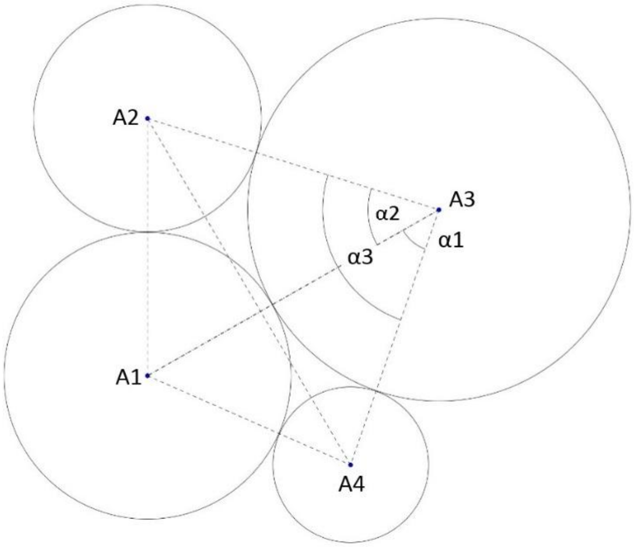
```
x=3;                               %definiowanie zmiennej
LS=8-cos(x/2)^2                    %obliczenie wartości lewej strony równania
LS=7.9950                          %wynik dla lewej strony
PS=(tan(x)+3*sin(x))/(2*tan(x))    %obliczenie wartości prawej strony równania
PS=-0.9850                         %wartość prawej strony
```

Po wykonaniu obliczeń widać że równanie nie jest tożsame, wykonanie tego prostego zadania analitycznie kosztowało by czas przeliczania kolejnych wartości kąta w tabelach, zaś dzięki zastosowaniu programu jesteśmy w stanie sprawdzać wyniki dla różnych wartości zmiennej x.

Zad. 2

Dane są cztery okręgi(rys.). W punkcie styku poszczególnych okręgów przechodzą odcinki mające swoje zakończenia w środkach okręgów. Obliczyć odległość pomiędzy środkami kół A_2 i A_4, wiedząc że promienie poszczególnych okręgów mają wartość:

r_1=14mm; r_2=10mm; r_3=18mm; r_4=8mm



Rozwiązanie analityczne:

Linie łączące środki okręgów tworzą cztery trójkąty, w dwóch z nich $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_1A_2A_4$ długości wszystkich boków są znane, dzięki czemu stosując twierdzenie cosinusów można wyznaczyć wartości kątów α_1, α_2.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

Obliczenie kąta α_1:

$(r_1+r_4)^2=(r_4+r_3)^2+(r_3+r_1)^2-2(r_4+r_3)(r_3+r_1)\cos \alpha_1$

$22^2=26^2+32^2-2*26*32* \cos \alpha_1$

$484=676+1024-1664 \cos \alpha_1$

$\cos \alpha_1 = \frac{1216}{1664}$

$\alpha_1=\arccos\frac{1216}{1664}$

$\alpha_1=43^o$

Obliczanie kąta α_2:

$(r_1+r_2)^2=(r_2+r_3)^2+(r_3+r_1)^2-2(r_2+r_3)(r_3+r_1)\cos \alpha_2$

$24^2=28^2+32^2-2*28*32* \cos \alpha_2$

$576=784+1024-1792 \cos \alpha_2$

$\cos \alpha_2 = \frac{1232}{1792}$

$\alpha_2=\arccos\frac{1232}{1792}$

$\alpha_2=47^o$

Obliczanie kąta α_3:

$\alpha_3= \alpha_1+ \alpha_2=90^o$

Obliczanie odległości pomiędzy okręgami A_2 i A_4:

Kąt α_3 jest kątem prostym więc odległość można obliczyć z tw. Pitagorasa:

$(A_2A_4)=\sqrt{((r_2+r_3)^2+(r_3+r_4)^2)}$

$(A_2A_4)=38{,}2mm$

Rozwiązanie w programie MATLAB:

```
r1=14mm; r2=10mm; r3=18mm; r4=8mm        % zdefiniowanie wartości promieni
(A1A4)=(r1+r4); (A1A3)=(r1+r3);   % obliczenie wartości poszczególnych boków
(A1A2)=(r1+r2); (A2A3)=(r2+r3);   % obliczenie wartości poszczególnych boków
(A4A3)=(r4+r3);                   % obliczenie wartości poszczególnych boków
Alfa1=acos((A4A3^2+A1A3^2-A1A4^2)/(2*A4A3*A1A3)); % miara kąta α1
Alfa2=acos((A2A3^2+A1A3^2-A1A2^2)/(2*A2A3*A1A3)); % miara kąta α2
Alfa3=Alfa1+Alfa2;                                % miara kąta α3
(A2A4)=sqrt(A2A3^2+A3A4^2);                      % długość szukanego boku
```